ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG NGỌC THẾ

VỀ TỐI ƯU TRÊN ĐA TẠP RIEMANN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, 9/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG NGỌC THẾ

VỀ TỐI ƯU TRÊN ĐA TẠP RIEMANN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

TS. NGUYỄN THANH SƠN

Thái Nguyên, 9/2018

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\otimes$	tích tenxơ của các không gian vectơ
$C^\infty(\mathcal{M})$	tập tất cả các hàm trơn trên $\mathcal{M}$
$\mathfrak{F}(U)$	tập tất cả hàm trơn, giá trị thực xác định trên U
$\mathrm{grad} f(x)$	Gradient của hàm số f
$\mathrm{Hess} f$	Hessian của hàm số f
S^{m-1}	mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^m$
$T_x\mathcal{M}$	không gian tiếp xúc của $\mathcal{M}$ tại x
$\mathrm{tr}(A)$	tổng các phần tử trên đường chéo của ma trận vuông A
$\mathfrak{X}(\mathcal{M})$	tập các trường vectơ trơn trên $\mathcal{M}$.

Mở đầu

Bài toán tối ưu trên đa tạp xuất hiện rất tự nhiên và khá phổ biến. Chẳng hạn, khi xét một bài toán tối ưu có ràng buộc, trong rất nhiều trường hợp, tập chấp nhận được là một đa tạp. Khi đó, ta có một bài toán tối ưu trên đa tạp. Câu hỏi tự nhiên là những phương pháp tối ưu quen thuộc, chẳng hạn Tìm theo đường thẳng, có thể được dùng cho bài toán tương ứng trên đa tạp hay không?

Trong $\mathbb{R}^n$, việc tịnh tiến theo hướng của một vectơ rất rõ ràng: ta chỉ cần cộng vào tọa độ của điểm cần tịnh tiến với tọa độ vectơ tịnh tiến. Nhưng trên một đa tạp, gradient của hàm mục tiêu lại là một vectơ thuộc không gian tiếp xúc của đa tạp chấp nhận được. Khi đó, về nguyên tắc, ta không thể cộng một điểm trên đa tạp với một vectơ trên không gian tiếp xúc. Nếu giả sử có cộng được một cách máy móc thì kết quả đó sẽ không còn là một điểm nằm trên đa tạp nữa. Để góp phần làm sáng tỏ những vấn đề này, chúng tôi đã chọn đề tài "*Về tối ưu trên đa tạp Riemann*" để làm đề tài luận văn thạc sĩ. Nội dung của luận văn được trình bày trong ba chương.

Chương 1. Đa tạp và một số khái niệm liên quan

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm, tính chất của đa tạp và một số khái niệm liên quan. Đồng thời các ví dụ về đa tạp, đường trắc địa, ánh xạ mũ được chúng tôi quan tâm trình bày chi tiết.

Chương 2. Thuật toán Tìm theo đường thẳng trên đa tạp

Chương này trình bày những ý tưởng và xây dựng thuật toán Tìm theo đường thẳng và phương pháp Newton trên đa tạp Riemann. Chúng tôi cũng trình bày một số tính chất về tính hội tụ của thuật toán.

Chương 3. Ví dụ về bài toán tối ưu trên mặt cầu

Trong chương này, chúng tôi áp dụng những thuật toán đã xây dựng cho môt số bài toán trên mặt cầu đơn vị S^{n-1} với các ví dụ số cụ thể.

Luận văn kết thúc với phần kết luận và tài liệu tham khảo.

Mặc dù đã rất nghiêm túc và cố gắng thực hiện luận văn này, nhưng luận văn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết nhất định. Kính mong sự góp ý của các thầy cô để luận văn này được hoàn chỉnh và ý nghĩa hơn.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Thanh Sơn. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn tận tình và đầy trách nhiệm để tác giả hoàn thành luận văn này.

Tác giả đã học tập được rất nhiều kiến thức chuyên ngành bổ ích cho công tác và nghiên cứu của bản thân. Nhân dịp này tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các Thầy giáo, Cô giáo đã tham gia giảng dạy lớp Cao học Toán K10A; Nhà trường và các phòng chức năng của Trường, Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tác giả xin cảm ơn gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã động viên, ủng hộ và tạo mọi điều kiện cho tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu và học tập.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2018

Tác giả luận văn

Hoàng Ngọc Thế

Chương 1

Đa tạp và một số khái niệm liên quan

Trong chương này, chúng tôi trình bày một cách chi tiết những khái niệm, tính chất quan trọng liên quan đến đa tạp. Những nội dung này chủ yếu dựa vào tài liệu [1]. Người đọc cũng có thể tham khảo tài liệu [2].

1.1 Khái niệm đa tạp

1.1.1 Đa tạp khả vi

Định nghĩa 1.1.1 (Xem [1])**.** Giả sử $(\mathcal{M}, \tau)$ là không gian tô pô Hausdorff với một cơ sở đếm được. Khi đó $\mathcal{M}$ được gọi là một *đa tạp tô pô* $m-$ chiều nếu nó đồng phôi địa phương với không gian $\mathbb{R}^m$, nghĩa là với mỗi điểm $x \in \mathcal{M}$, tồn tại một lân cận U của x, có một tập con mở $V \subset \mathbb{R}^m$ và một phép đồng phôi $\varphi : U \to V$.

Cặp (U, φ) được gọi là một *bản đồ địa phương* hay gọi tắt là *bản đồ* trong $\mathcal{M}$.

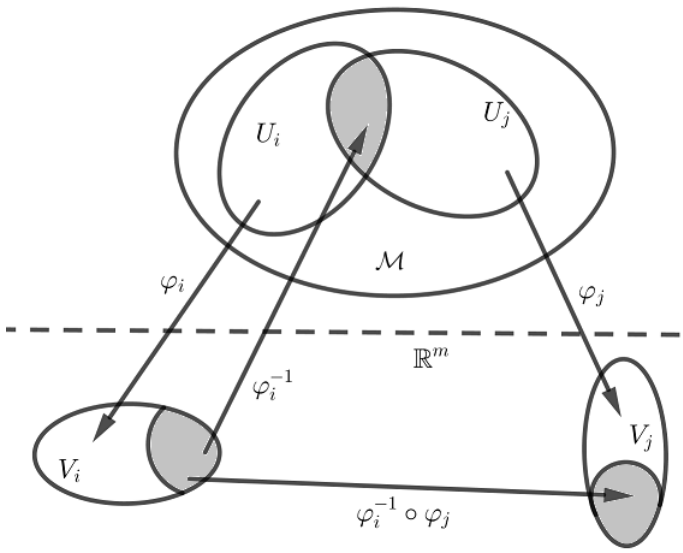
Ta viết $\mathcal{M}^m$ để thể hiện đa tạp $\mathcal{M}$ có m chiều.

Với U là một tập mở bất kỳ của $\mathbb{R}^n$, ta nhắc lại các kí hiệu $C^k(U, \mathbb{R}^m)$, $C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$, và $C^\omega(U, \mathbb{R}^m)$ lần lượt là tập tất cả các ánh xạ khả vi liên tục tới cấp k, tập tất cả các ánh xạ trơn và tập tất cả các ánh xạ giải tích từ U vào $\mathbb{R}^m$.

Định nghĩa 1.1.2 (Xem [1])**.** Xét đa tạp tô pô $\mathcal{M}^m$. Họ $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ các bản đồ trên $\mathcal{M}$ được gọi là một *atlas lớp* $C^k (k \geq 1)$ hay C^k- *atlas* nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) họ $\{U_i\}$ là một phủ mở của $\mathcal{M}$;

(ii) với hai bản đồ (U_i, φ_i) và (U_j, φ_j) mà $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ thì *ánh xạ chuyển tiếp* $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ xác định trên $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ là ánh xạ khả vi lớp C^k từ $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ lên $\varphi_j(U_i \cap U_j)$.



Một bản đồ (U, φ) được gọi là *tương thích* với C^k- atlas $\mathfrak{A}$ nếu hợp $\mathfrak{A} \cup \{(U, \varphi)\}$ là một C^k- atlas.

Atlas $\hat{\mathfrak{A}}$ được gọi là *atlas cực đại* nếu nó chứa tất cả các bản đồ tương thích với nó. Khi đó $\hat{\mathfrak{A}}$ cũng được gọi là một C^k- *cấu trúc* trên $\mathcal{M}^m$.

Cặp $(\mathcal{M}, \hat{\mathfrak{A}})$ được gọi là một C^k- *đa tạp* hay *đa tạp khả vi lớp* C^k.

Nhận xét 1.1.3. Một C^k- atlas $\mathfrak{A}$ trên một đa tạp tô pô $\mathcal{M}$ xác định duy nhất một C^k- cấu trúc trên $\mathcal{M}$.

Ví dụ 1.1.4.

1. Xét $\mathcal{M} = \mathbb{R}^m$ với tô pô Euclide. Ta có một $C^\omega-$ cấu trúc tầm thường

$$\mathfrak{A} = \{(\mathbb{R}^m, \varphi) \ : \ \varphi : x \mapsto x\}.$$